La notion de débogage dans la science contemporaine

Michel Nguyen The

Vendredi 4 avril 2008

Plan

Définition du bug (au sens de Xavier Sallantin)

Bugs naturel/physique et culturel/mathématique.

Bugs quantiques.

Bugs mathématiques.

Points à éclaircir dans la TGS (bioarithmétique en particulier).

Vers une définition du bug

Définition Wikipédia : Un bogue ou bug informatique est une anomalie dans un programme informatique l'empêchant de fonctionner correctement. Sa gravité peut aller de bénigne (défauts d'affichage mineurs) à majeure (explosion du vol 501 de la fusée Ariane 5).
Définition futura-sciences : Défaut de conception ou de réalisation se manifestant par des anomalies de fonctionnement.

Résumé : bug = **anomalie** ou **défaut de conception**

Comparaison bug sens usuel et chez Xavier Sallantin

Définition usuelle : bug = **anomalie** ou **défaut de conception**
Exemple de bug informatique : mettre un 0 à la place d'un 1 en nooarithmétique.

Chez Xavier : pas de définition formelle, mais $\neq$ sens usuel.
Bug $\neq$ anomalie
Bug $\neq$ défaut de conception

Mais plutôt :
Bug = identification de deux concepts différents, *e.g.*

•$0 \equiv 1$	Bug digital : $[0(0^0)1]$
•$+ \equiv -$	Bug ordinal : $[1(\pm 1)2]$
•$\times \equiv \div$	Bug cardinal : $[1(.2^{\pm 1})2]$
• gauche $\equiv$ droit	

Comparaison débogage sens usuel et chez Xavier Sallantin

Définition usuelle : Action de faire tourner un programme pas à pas pour trouver une erreur de programmation.

Définition XS : Différentiation de deux concepts.

Définition plus précise : passage d'un niveau de réalité (en particulier, d'une arithmétique) où deux concepts sont identiques, à un niveau de réalité ou ces deux concepts deviennent différents.

Idée de l'exposé

Trouver dans la science contemporaine

(essentiellement physique et mathématique)

et classifier

des exemples de bugs au sens bénaya.

Nombres et opérations

Le bug peut porter sur deux types d'objetss :

• les chiffres (0 ou 1)

• les nombres (bioarithmétique, 22 signifiés pour 64 signifiants, distribution de 64 codons pour 22 acides aminés)

• les opérations :

cosmoarithmétique : $+$ se confond avec $-$

bioarithmétique : $\times$ se confond avec $\div$.

Bugs numériques naturel et culturel

Bug numérique naturel :
1) il y a une indétermination essentielle sur un nombre. Exemples quantiques : relations de Heisenberg, statistiques de Fermi-Dirac et Bose-Einstein, qbits...
2) approximation d'opérations. Exemples relativistes : loi d'addition des vitesses, loi de dilatations.

Bug numérique culturel : on identifie deux nombres ou deux éléments.
Exemples : injections, classes d'équivalence, en particulier de congruence ; projections.
Nombres invisibles : analyse non standard.

Relations de Heisenberg

L'inégalité de Heisenberg est souvent écrite

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \left\langle \left[\hat{A}, \hat{B} \ \right] \right\rangle_\gamma \right|$$

où

- A et B sont deux observables
- $\hat{A}$ $\hat{B}$ sont les opérateurs correspondants.
- $[\hat{A}, \hat{B}]$ représente le commutateur de $\hat{A}$ et $\hat{B}$
- $\langle \ \rangle_\gamma$ est la moyenne sur l'état $|\gamma\rangle$
- Écart type : $\sqrt{\left\langle \hat{X}^2 \right\rangle_\gamma - \left\langle \hat{X} \right\rangle_\gamma^2}$

Relations de Heisenberg

ou encore :

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \int \Psi^*(\mathbf{r}, t)[\hat{A}, \hat{B}]\Psi(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} \right|$$

- A et B sont deux observables
- $\hat{A}$ $\hat{B}$ sont les opérateurs correspondants.
- $[\hat{A}, \hat{B}]$ représente le commutateur de $\hat{A}$ et $\hat{B}$
- Ψ fonction d'onde complexe tq $|\Psi|^2$ densité de probabilité : $d^3P(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \ d^3\mathbf{r}$

Relations de Heisenberg chez XS

Produit TFL : homogène à une action.
Doivent exister trois relations de Heisenberg :

$$dT \cdot d(FL) \geq Cte \qquad \text{type temporel}$$

$$dF \cdot d(TL) \geq Cte \qquad \text{type dynamique}$$

$$d(TF) \cdot dL \geq Cte \qquad \text{type spatial}$$

Propriété : Les opérateurs $\hat{x} = x$ et $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ ne commutent pas.

Démonstration :

Densité de probabilité : $d^3P(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r},t)|^2 \; d^3\mathbf{r}$

Équation de Schrödinger : $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\mathbf{r},t)$

$$\begin{aligned}
\hat{x}\hat{p}\Psi(x,t) &\equiv x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(x,t) \\
\hat{p}\hat{x}\Psi(x,t) &\equiv \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)x\Psi(x,t) \\
&\equiv i\hbar\Psi(x,t) + x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(x,t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow &\quad (\hat{x}\hat{p})\Psi(x,t) = i\hbar\Psi(x,t) \\
\Rightarrow &\quad [\hat{x},\hat{p}] = i\hbar
\end{aligned}$$

Relations de Heisenberg TF.L

Démonstration de la relation de Heisenberg position-impulsion :

- $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$
- $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2} \left| \int \Psi^*(\mathbf{r}, t)[\hat{x}, \hat{p}]\Psi(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} \right|$
- Condition de normalisation $\int |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \, d^3\mathbf{r} = 1$

$$\Longrightarrow \Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar$$

Relations de Heisenberg T.FL

t : paramètre de l'équation de Schrödinger, pas une observable (bien que grandeur physiquement mesurable).
Propriété (Pauli) : Généralement, $\hat{t}$ pas opérateur hermitien.
Preuve : spectre hamiltonien borné inférieurement, donc t non auto-adjoint. Si on avait $\hat{T}$ canoniquement conjugué avec $\hat{H}$, alors

$$[\hat{T}, \hat{H}]_- = i\hbar\hat{\mathbb{1}} \Rightarrow e^{(-i\varepsilon\hat{T})\hat{H}}e^{(i\varepsilon\hat{T})} = \hat{H} - \varepsilon\hat{\mathbb{1}} \, \forall\varepsilon$$

Opérateur $e^{i\varepsilon\hat{T}}$ appliqué à $|E>$ hamiltonien de valeur propre $E \Rightarrow$ état propre d'énergie $E - \varepsilon \Rightarrow$ spectre continu d'énergie $-\infty < E < +\infty$
Remarque : t opérateur dans cas particuliers (particule spatialement confinée).
Confined Quantum Time of Arrival for Vanishing Potential par Eric A. Galapon, Roland F. Caballar, and Ricardo Bahague

Relations de Heisenberg T.FL

Relation $\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{1}{2}\hbar$ communément admise.
Preuves au cas par cas.

Exemples :
• une seule énergie E possible $\Rightarrow \Delta t = \infty$ car Δt=intervalle où on distingue une évolution du système
• deux énergies possible E_1 et E_2 : $\Delta E = E_2 - E_1$, terme en $e^{i(E_2 - E_1)(t - t_0)/\hbar} \Rightarrow$ fréquence de Bohr $\nu_{21} = \frac{|E_2 - E_1|}{\hbar}$
• ...

Question : Peut-on faire une démonstration générale ?

Relations de Heisenberg T.FL

Autre formulation (Leonid I. Mandelshtam et Igor E. Tamm).
État $|\Psi\rangle$ non stationnaire, observable B.

$$\Delta_\psi E \frac{\Delta_\psi B}{\left|\frac{\mathrm{d}\langle\hat{B}\rangle}{\mathrm{d}t}\right|} \geq \frac{\hbar}{2}$$

- $\Delta_\Psi E$ déviation standard de l'opérateur énergie dans l'état $|\Psi\rangle$,
- $\Delta_\Psi B$ déviation standard de l'opérateur $\hat{B}$

Conclusion : Une analyse dimensionnelle ne suffit pas à déterminer une relation de Heisenberg.

Relations de Heisenberg TL.F

Cette relation n'existe pas dans la littérature.
Quelle signification donner à F ? À TL ?

Suggestion pour la force f :
$f = \frac{dp}{dt}$ (similaire à la relation fondamentale de la dynamique).
$\hat{p}$ opérateur $\Rightarrow \frac{d\hat{p}}{dt}$ opérateur

$g = tx$: *a priori* n'existe pas dans la littérature.
Intrication entre f, t et x.

Relations de Heisenberg L.F

Opérateurs : $\hat{f} = \frac{d\hat{p}}{dt}$, $\hat{x}$.

$$
\begin{aligned}
\hat{f}\hat{x}\Psi(x,t) &= \left(-i\hbar\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\right)(x\Psi(x,t)) \\
&= -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(x\Psi_t) \\
&= -i\hbar(\Psi_t + x\Psi_{tx}) \\
\hat{x}\hat{f}\Psi(x,t) &= -i\hbar x\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\Psi \\
\Delta f\Delta x &\geq \frac{1}{2}\left|\int \Psi^*(\mathbf{r},t)[\hat{f},\hat{g}]\Psi(\mathbf{r},t)d^3\mathbf{r}\right| \\
&\geq \frac{1}{2}\left|\hbar\int \Psi^*(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t)d^3\mathbf{r}\right|
\end{aligned}
$$

Conclusion : calcul à la louche pas simple *a priori*, à approfondir.

Relations de Heisenberg TL.F

Opérateurs : $\hat{f} = \frac{d\hat{p}}{dt}$, $\hat{g} = \hat{t}\hat{x}$. (Calcul illicite fait pour la forme)

$$\begin{aligned}
\hat{f}\hat{g} &= \left(-i\hbar\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\right)(tx\Psi(x,t)) \\
&= -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(x\Psi + tx\Psi_t) \\
&= -i\hbar(\Psi + x\Psi_x + t\Psi_t + tx\Psi_{tx}) \\
\hat{g}\hat{f} &= -i\hbar tx\,\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\Psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta f\Delta g &\geq \frac{1}{2}\left|\int \Psi^*(\mathbf{r},t)[\hat{f},\hat{g}]\Psi(\mathbf{r},t)d^3\mathbf{r}\right| \\
&\geq \frac{1}{2}\hbar\left|1 + \int \Psi^*(\mathbf{r},t)x\frac{\partial}{\partial x}\Psi(\mathbf{r},t)d^3\mathbf{r} + \int \Psi^*(\mathbf{r},t)t\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t)d^3\mathbf{r}\right|
\end{aligned}$$

Conclusion : calcul à la louche pas simple *a priori*, à approfondir.

Relations de Heisenberg nombre et phase

Il existe d'autres relations de Heisenberg.
Indétermination sur des grandeurs $\simeq$ indétermination sur nombre.
Existe relation de Heisenberg avec nombre de particules :
Si $N =$ nombre d'électrons dans un superconducteur
et $\phi =$ phase du paramètre d'ordre de Ginzburg-Landau :
$\Delta N \Delta \phi \geq 1$

Espace TFL

Ordre précis des débogages : temps, force puis espace.
Rôles non symétriques des coordonnées TFL.
$\Rightarrow$ utiliser une géométrie non commutative.
Idée à creuser.

Énergie du vide

Deux notions :

• densité moyenne d'énergie et de pression engendrée par les fluctuations du vide quantique.

• La densité moyenne d'énergie du vide sur des échelles cosmologiques, mise en évidence par l'observation de l'accélération de l'expansion de l'univers.

Nullité en moyenne.

Statistiques naturelles : Distributions d'énergie (Maxwell-Boltzmann)

r particules et n cellules. Combien y a-t-il de manière de ranger les particules dans les cellules ? (une cellule = un état d'énergie)

Distribution de Maxwell-Boltzmann. Les particules sont distinguables. Ne fonctionne pour aucune particule connue. C'est une distribution purement macroscopique.

Les n^r placements possibles sont équiprobables, et la probabilité d'obtenir les nombres d'occupations $r_1, \cdots, r_n$ vaut

$$\frac{r!}{r_1! r_2! \cdots r_n!} n^{-r}$$

Statistiques naturelles : Distributions d'énergie (Bose-Einstein)

Statistique de Bose-Einstein. Les particules sont indistinguables.
Bosons : particule de spin entier.

$$\frac{1}{A_{r,s}} \text{ avec } A_{r,s} = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$$

Statistiques naturelles : Distributions d'énergie (Fermi-Dirac)

Statistique de Fermi-Dirac (électrons, neutrons, protons).
Fermions : particules de spin demi-entier, suit Principe d'exclusion de Pauli.
Hypothèse 1 : il est impossible pour deux particules ou plus de partager la même cellule.
Hypothèse 2 : tous les arrangements possibles satisfaisant la première hypothèse sont équiprobables.
H1 $\rightarrow r \leq n$
Il y a $\binom{n}{r}$ arrangements, chacun de proba $\binom{n}{r}^{-1}$.

Statistiques naturelles : Distributions d'énergie (Fermi-Dirac)

Exemple : Prenons $n = 5$, $r = 3$. L'arrangement $(\bullet| - -| \bullet | \bullet | - -)$ a la probabilité $\frac{6}{125}$, $\frac{1}{35}$ ou $\frac{1}{10}$, selon les statistiques respectives de Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein et Fermi-Dirac.

À hautes températures,

Bose-Einstein $\longrightarrow$ Maxwell-Boltzmann

Fermi-Dirac $\longrightarrow$ Maxwell-Boltzmann

Espace de Fock

Formalisation de l'indétermination sur le nombre de particules :

$$F_\nu(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_\nu H^{\otimes n}$$

Exemple d'état de l'espace de Fock :

$$|\Psi\rangle_\nu = |\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n\rangle_\nu$$

Base de nombres d'occupation

$$|n_0, n_1, \cdots, n_k\rangle_\nu$$

Loi relativiste d'addition de vitesses

Il existe une vitesse maximale c. On additionne les vitesses de la manière suivante :

$$u \oplus v = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$$

Pté : $u \oplus c = c$.
Pour petites vitesses : dans la pratique, addition usuelle.
addition usuelle = approximation de l'addition relativiste.
existence d'une vitesse limite.
Notre mathématique est-elle licite ? Peut-on manipuler des nombres arbitrairement grands ou petits ?

Unités de Planck

nom	dimension	formule	valeur approchée
longueur de Planck	longueur (L)	$l_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$	$1,616 \times 10^{-35} m$
masse de Planck	masse (M)	$m_P = \sqrt{c\hbar/G}$	$2,177 \times 10^{-8} kg$
temps de Planck	temps (T)	$t_P = \frac{l_P}{c} = \sqrt{\hbar G c^5}$	$5,391 \times 10^{-44} s$
température de Planck	température(Θ)	$T_P = \frac{m_P c^2}{k} = \frac{\sqrt{c^5 \frac{\hbar}{G}}}{k}$	$1,415 \times 10^{32}$
charge de Planck	charge électrique (Q)	$q_P = \sqrt{c\hbar 4\pi\epsilon_0}$	$1,875 \times 10^{-18} C$

Unités dérivées :

force de Planck (MLT^{-2}) $F_P = \frac{m_P l_P}{t_P^2} = \frac{c^4}{G} \simeq 1,210 \times 10^{44} N$,

énergie de Planck $(\mathrm{ML}^2 T^{-2})$

$$E_P = F_P l_P = c^2 \sqrt{\frac{c\hbar}{G}} = 10^{19} GeV \simeq 1,956 \times 10^9 J.$$

Échelle de longueur cosmologique

Relativité d'échelle : longueur fondamentale $\Lambda = (\hbar G/c^3)^{1/2} = l_P$.
Densité de probabilité de Hawking sans l'échelle classique galiléenne :

$$P = \exp\left[\exp\left(2\ln\frac{L}{\lambda}\right)\right]$$

où λ est une échelle de longueur statique de référence négligeable devant $\mathbb{L}$.
Dans le cas d'une échelle de Lorentz :

$$P = \exp\left[\exp\left(2\ln(L/\lambda)\right)\sqrt{1-\frac{\ln^2(L/\lambda)}{\ln^2(\mathbb{L}/\lambda)}}\right]$$

$\mathbb{L} = \Lambda^{-1/2}$

Lois de dilatation

Notations : $\rho = \varepsilon'/\varepsilon,\ \rho' = \varepsilon''/\varepsilon'$ et $\rho'' = \varepsilon''/\varepsilon$.

Loi de dilatation

$$\ln \rho'' = \ln \rho + \ln \rho'$$

vraie jusqu'à une échelle de transition λ.

Au-delà :

$$\ln \rho'' = \frac{\ln \rho + \ln(\varepsilon/\lambda)}{1 + \ln \rho \ln \rho' / \mathbb{C}^2}$$

où $\mathbb{C} = \ln(\mathbb{L}/l_P)$

Lois de dilatation

Échelle ε dilatée par ρ donne échelle ε' tq

$$\ln \frac{\varepsilon'}{\lambda} = \frac{\ln \rho + \ln(\varepsilon/\lambda)}{1 + \ln \rho \ln(\varepsilon/\lambda) \ln(\mathbb{L}^2/\lambda)}$$

Propriété : $\forall \varepsilon > \lambda,\ \forall \rho,\ \varepsilon' < \mathbb{L}$.

Ordinateur quantique

Bit : 0 ou 1.

Qubit : $\alpha \cdot |0\rangle + \beta \cdot |1\rangle$.

Deux qubits réunis : $\alpha \cdot |00\rangle + \beta \cdot |01\rangle + \gamma \cdot |10\rangle + \delta \cdot |11\rangle$ avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$.

n qubits : superposition de 2^n états $\Rightarrow$ puissance de calcul décuplée.

Bug entre 0 et 1 : différent de bug informatique avec des bits classiques.

Confusion entre 0 et 1 mais pas identification.

$\Rightarrow$ Nature philosophique du bug à expliquer.

Apparition de bugs en math $\equiv$ surjection

On identifie des éléments, essentiellement par surjection (application telle que tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au moins un antécédent).
Exemple : projection de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} p : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1, x_2) \end{array}$$

Si on élimine la troisième composante, on ne peut plus distinguer $(0, 0, 0)$ et $(0, 0, 1)$!

Apparition de bugs en math : classe d'équivalence

Exemple de bug : classes d'équivalence dans $\mathbb{Z}$ modulo p.

$$x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y[p] \Leftrightarrow (x - y) \text{ divisible par } p$$

On note l'ensemble obtenu

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{p-1}\right\}$$

On peut amplifier un bug par surjections successives :

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_8 \hookrightarrow \mathbb{Z}_4 \hookrightarrow \mathbb{Z}_2$$

Il existe sans doute des treillis de surjections.

Au-delà du nombre

Au-delà du débogage : abstractions.

Nombre $\rightarrow$ variable x. Autres objects mathématiques : ensembles, fonctions...

Structures algébriques : structure de monoïde, de groupe...
Manipulation abstraite d'éléments et d'opérations qui ne sont plus des nombres ou des lois bien définies.

Étude systématique par la théorie des catégories.
Attention : inséparabilité de la géométrie et de la logique. Côté naturel et surnaturel.

Théorème de Gödel. Conséquences pratiques ?

Axiomes indécidables.

Analyse non standard. Infinis et infinitésimaux.

Questions ouvertes sur la TGS

Atomes et acides aminés

Matière inerte (physique) Classification périodique des éléments : équation de Schrödinger + principe de Pauli.

Matière vivante (Biologie) Surjection codons dans acides aminés :
hasard ou nécessité ?

Quelle révolution quantique pour la biologie ?

Physique : monde de lois précises et invariantes.
Biologie : monde de l'exception.

Arithmétiques de la TGS : fondements de la bioarithmétique

On peut compter dans la nooarithmétique avec des ordinateurs macrophysiques, sans faire appel à des composants biologiques. Où est la nécessité de considérer une bioarithmétique ?

Bioarithmétique mal définie : confusion de bugs :

1) Indiscernabilité des opérateurs $\times$ et $\div$, menant à identifier 2, 4, 6...
2) Indiscernabilité de nombres : identification d'un nombre avec le nombre premier le précédant (on identifie 6 avec 5, et pas avec 2 et 4)

Minimum pour définir une arithmétique : ensemble, éléments, opérations. Quels sont-ils ?

Conclusion

- Notion de bug (au sens bénaya) peu étudiée en philosophie des sciences
- se décline en physique et en mathématiques
- Notion encore confuse dans la TGS : définition à affiner